多维随机游走及应用

摘要

本文从一维和二维随机游走开始探究,基于组合数学和概率论的有关理论,利用 Bernoulli 概型及其叠加推导得到了从一确定点出发到达任意随机点的概率;然而在三维随机游走问题上,不能直接利用 Bernoulli 概型,因而首先引入了一个有放回的摸球问题,再通过该问题得到三维随机变量的分布概型,从而解决了三维随机游走中到达任意随机点的概率问题,并且通过这个思想推导了多维随机游走的相关结论.最后,本文将得到的结论应用在环形随机游走中,得到相关结论.

关键字： 多维随机游走 多项式系数 环形随机游走

正文：

引言：

“随机游走”（random walk）是指基于过去的表现,无法预测将来的发展步骤和方向.随机游走问题最早来源于“莱茵街的醉汉”问题：一个醉汉从酒店出发,向左走和向右走分别有一个概率,那么他回到家的概率是多少？这是一个有趣的概率问题,引起了我的兴趣.同时,在思考解决这个问题的基础上,我想是否也可以解决在二维坐标平面内的随机游走问题,甚至是在多维空间内的？在环上进行随机游走又是怎么样的呢？随后我去查阅了有关方面的内容,其中一维随机游走在随机过程中有给出一些结论,而二维,多维随机游走的结论却很少甚至空白；环型随机游走也没有结论.于是,我试图去解决这些问题.

本文的主要理论思想是 Bernoulli 概型及多维随机变量分布

随机游走理论在实际生活中有广泛的应用,如股票价格的游走模型“R/S 分析法” 从对ＥＭＨ的产生及其发展讨论出发,从分形的角度探讨市场特

性的分形市场分析方法及其所反映的市场特性；应用基于边缘检测的随机游走算法对多车辆视频进行精确车辆检测等等. 这些也都是今后研究的潜在方向.

本文中, 我们假设所讨论的随机过程均为离散的, 即每一步之间都是相互独立的. 每一次沿坐标轴移动一个单位.

基本理论

1. 一维随机游走

一维随机游走是最简单的, 也是最基础的. 由于每一步之间都相互独立, 并且每一步有且只有两种可能结果, 每种可能情况发生的概率之和为1, 所以它符合 Bernoulli 概型.

定理 1：假设从零点出发在数轴 x 上一维随机游走, 向右走的概率为 p, 向左走的概率为 q, 且 $p,q>0, p+q=1$. 设事件 A：共走了 N 步, $N\in N^*$, 到达了点 $a, |a|\le N$. 则：

$$P(A)=\begin{cases}0, N\not\equiv a(\mathrm{mod}\,2)\\ C_N^{\frac{N+a}{2}}p^{\frac{N+a}{2}}q^{\frac{N-a}{2}}, \mathrm{N}\equiv a(\mathrm{mod}\,2)\end{cases}.$$

证明：

以 x_n 表示第 n 步后点所在的坐标, 则有 $x_n=x_{n-1}+(-1)^{\delta_n}$, 当第 n 步为向右时 $\delta_n=0$, 当第 n 步为向左时 $\delta_n=1$. 则 $x_N=\sum_{i=1}^{N}(-1)^{\delta_i}=\alpha-\beta$. 其中 α 为 $\delta_i=0$ 的个数, β 为 $\delta_i=1$ 的个数. 则有 $\alpha-\beta=a$, $\alpha+\beta=N$, $N-a=2\beta$. 故 $\mathrm{N}\equiv a(\mathrm{mod}\,2)$.

$\therefore$（1）： $N\not\equiv a(\mathrm{mod}\,2)$ 时, $P(A)=0$.

（2）: $\mathrm{N}\equiv a(\mathrm{mod}\,2)$ 时,

设向右走了k步, 则向左走了$N-k$步, 则： $k-(N-k)=a \Rightarrow k=\dfrac{N+a}{2}$.

$\therefore\ P(A)=C_N^k p^k q^{N-k}=C_N^{\frac{N+a}{2}} p^{\frac{N+a}{2}} q^{\frac{N-a}{2}}$,

综上, $P(A)=\begin{cases}0, N \not\equiv a(\bmod 2)\\ C_N^{\frac{N+a}{2}} p^{\frac{N+a}{2}} q^{\frac{N-a}{2}},\ \mathrm{N} \equiv a(\bmod 2)\end{cases}$.

推论 1. 假设一点从点i出发, 在数轴x上一维随机游走, 向右走的概率为p, 向左走的概率为q, 且$p,q>0, p+q=1$. 设事件A':共走了N步, $N \in N^*$, 到达了点$j,|j-i| \leq N$. 则

$$P(A')=\begin{cases}0, N \not\equiv j-i(\bmod 2)\\ C_N^{\frac{N+(j-i)}{2}} p^{\frac{N+(j-i)}{2}} q^{\frac{N-(j-i)}{2}} \quad \mathrm{N} \equiv j-i(\bmod 2)\end{cases}.$$

此后, 我们自然可以想到另外一个问题, 在前N步内到达点a的概率是多少?

推论 2：从零点出发在数轴x上一维随机游走, 向右走的概率为p, 向左走的概率为q, 且$p,q>0, p+q=1$. 设事件A''：在N步之内（包括第N步）到达了点$a,|a| \leq N$, $N \in N^*$. 则

$$P(A'')=\sum_{i=a}^{N} C_i^{\frac{i+a}{2}} p^{\frac{i+a}{2}} q^{\frac{i-a}{2}} \quad ,\text{其中 } i \equiv a(\bmod 2).$$

证明：

事件A''：在N步之内（包括第N步）到达点a, 即在第a步, 第$a+2$步, ……, 第N步（$N \equiv a(\bmod 2)$）或第$N-1$步（$N \not\equiv a(\bmod 2)$）中的一步或几步中到达点a. 根据定理 1, 第i步（$i \geq a, i \equiv a(\bmod 2)$）到达点$a$的概率为$C_i^{\frac{i+a}{2}} p^{\frac{i+a}{2}} q^{\frac{i-a}{2}}$.所以, 在$N$步之内（包括第$N$步）到达点$a$的概率即为所有可能情况发生的概率之和, 即

$$P(A'')=\sum_{i=a}^{N} C_i^{\frac{i+a}{2}} p^{\frac{i+a}{2}} q^{\frac{i-a}{2}},\ i\equiv a(\operatorname{mod}2).$$

2. 二维随机游走

与一维随机游走不同的是, 二维随机游走的每一步由一维中的2个方向变成了二维中的4个方向, 故不能简单地使用 Bernoulli 概型. 但是, 我们仍然可以通过两个 Bernoulli 概型的叠加得到二维随机游走的结论.

定理 2：一质点在二维坐标系 xOy 上进行随机游走, 从原点出发, 向右走的概率为 p，向左走的概率为 q，向上走的概率为 m，向下走的概率为 n，且 $p,q,m,n>0, p+q+m+n=1$.

设事件 B：共走了 N 步, $N\in N^*$, 到达了点 (a,b)（假设 $a,b>0$），$|a|+|b|\le N$. 则：

$$P(B)=\begin{cases}0, N\not\equiv a+b(\operatorname{mod}2)\\ \sum_{i=a}^{N-b}\left[C_N^i(p+q)^i(m+n)^{N-i}\cdot C_i^{\frac{i+a}{2}}p^{\frac{i+a}{2}}q^{\frac{i-a}{2}}\cdot C_i^{\frac{N-i+b}{2}}m^{\frac{N-i+b}{2}}n^{\frac{N-i-b}{2}}\right].\\ N\equiv a+b(\operatorname{mod}2), i\equiv a(\operatorname{mod}2)\end{cases}$$

证明：

设总步数为 N, 其中沿 x 轴方向走了 G 步, 沿 y 轴方向走了 H 步.

$\because G+H=N$
$\therefore a+b\le N$
$\therefore a\le N-b$

以 x_n 表示第 n 步后点所在的坐标, 则有 $x_n=x_{n-1}+(-1)^{\delta_n}$, 当第 n 步为向右时 $\delta_n=0$, 当第 n 步为向左时 $\delta_n=1$. 则 $x_G=\sum_{i=1}^{G}(-1)^{\delta_i}=\alpha-\beta$. 其中 α 为 $\delta_i=0$ 的个数, β 为 $\delta_i=1$ 的个数. 则有 $\alpha-\beta=a$, $\alpha+\beta=G$, $G-a=2\beta$. 故 $G\equiv a(\operatorname{mod}2)$.

Ⅰ. $G\not\equiv a(\operatorname{mod}2)$ 时, $P(B)=0$.

即此时是不可能到达$\left(a,b\right)$的；同时, 若$G \not\equiv a(\bmod 2)$, 有$G \not\equiv -a(\bmod 2)$, 即$\frac{G+a}{2}$不是整数, 在组合中这是不符合要求的, 故此时, $P(B)=0$.

II. $G \equiv a(\bmod 2)$,

这种情况下是可能到达$\left(a,b\right)$点的, （1） $G=a, H=N-a$.

A_1： x轴方向走了a步, y轴方向走了$N-a$步, 共N步. 则：

$$P\left(A_1\right)=C_N^a\left(p+q\right)^a\left(m+n\right)^{N-a}.$$

B_1： x轴方向走的a步均向右. 则：

$$P\left(B_1\right)=C_a^a p^a q^0=p^a.$$

$$\therefore P\left(A_1B_1\right)=P\left(A_1\right)P\left(B_1\middle|A_1\right)=C_N^a\left(p+q\right)^a\left(m+n\right)^{N-a}\cdot p^a.$$

C_1： y轴方向走了$N-a$步, 到了b. 则：

假设向上走了j步, 有 $j-\left(N-a-j\right)=b \Rightarrow j=\frac{N-a+b}{2}$,

$$P\left(C_1\right)=C_{N-a}^j m^j n^{N-a-j}=C_{N-a}^{\frac{N-a+b}{2}} m^{\frac{N-a+b}{2}} n^{\frac{N-a-b}{2}},$$

$$\therefore P\left(A_1C_1\right)=P\left(A_1\right)P\left(C_1\middle|A_1\right)=C_N^G\left(p+q\right)^G\left(m+n\right)\cdot C_{N-a}^{\frac{N-a+b}{2}} m^{\frac{N-a+b}{2}} n^{\frac{N-a-b}{2}}.$$

（2） $G=N-b, H=b$.

A_2： y轴方向只走了b步, x轴方向走了$N-b$步, 共N步. 则：

$$P\left(A_2\right)=C_N^b\left(p+q\right)^{N-b}\left(m+n\right)^b.$$

B_2： x轴方向走了$N-b$步, 到了a. 则：

假设向右走了i步, 有 $i-\left(N-b-i\right)=a \Rightarrow i=\frac{N+a-b}{2}$,

$$P\left(B_2\right)=C_{N-b}^i p^i q^{N-b-i}=C_{N-b}^{\frac{N+a-b}{2}} p^{\frac{N+a-b}{2}} q^{\frac{N-a-b}{2}}.$$

C_2：若y轴方向走的b步均向上. 则：

$$P\left(\mathrm{C}_2\right)=C_b^b m^b n^0=n^b.$$

$$\therefore P(A_2\mathrm{B}_2C_2)=P(A_2)\cdot P(\mathrm{B}_2C_2|A_2)=P(A_2)P(B_2|A_2)P(C_2|A_2)$$

$$=C_N^b(p+q)^{N-b}(m+n)^b\cdot C_{N-b}^{\frac{N+a-b}{2}}p^{\frac{N+a-b}{2}}q^{\frac{N-a-b}{2}}\cdot n^b.$$

（3） $a\le G\le N-b, b\le H\le N-a$.

A_3： x轴方向走了G步, y轴方向走了H步, 共N步. 则：

$$P(A_3)=C_N^G(p+q)^G(m+n)^{N-G}.$$

B_3： x轴方向走了G步, 到达a. 则：

假设向右走了g步, 有 $g-(G-g)=a\Rightarrow g=\frac{G+a}{2}$,

$$P(B_3)=C_G^g p^g q^{G-g}=C_G^{\frac{G+a}{2}}p^{\frac{G+a}{2}}q^{\frac{G-a}{2}}.$$

C_3： y轴方向走了H步, 到达b. 则：

假设向上走了h步, 有 $h-(H-h)=b\Rightarrow h=\frac{H+b}{2}$.

$$P(\mathrm{C}_3)=C_H^h m^h n^{H-h}=C_{N-G}^{\frac{N-G+b}{2}}m^{\frac{N-G+b}{2}}n^{\frac{N-G-b}{2}}.$$

$$\therefore P(A_3\mathrm{B}_3C_3)=P(A_3)\cdot P(\mathrm{B}_3C_3|A_3)=P(A_3)P(B_3|A_3)P(C_3|A_3)$$

$$=C_N^G(p+q)^G(m+n)^{N-G}\cdot C_G^{\frac{G+a}{2}}p^{\frac{G+a}{2}}q^{\frac{G-a}{2}}\cdot C_{N-G}^{\frac{N-G+b}{2}}m^{\frac{N-G+b}{2}}n^{\frac{N-G-b}{2}}.$$

$$\therefore P(B)=\begin{cases}0, N\not\equiv a+b(\mathrm{mod}\,2)\\ \sum_{i=a}^{N-b}\left[C_N^i(p+q)^i(m+n)^{N-i}\cdot C_i^{\frac{i+a}{2}}p^{\frac{i+a}{2}}q^{\frac{i-a}{2}}\cdot C_i^{\frac{N-i+b}{2}}m^{\frac{N-i+b}{2}}n^{\frac{N-i-b}{2}}\right],\\ N\equiv a+b(\mathrm{mod}\,2), i\equiv a(\mathrm{mod}\,2)\end{cases}$$

推论 3. 一质点在二维坐标系xOy上进行随机游走, 从点(c,d)出发, 向右走的概率为p, 向左走的概率为q, 向上走的概率为m, 向下走的概率为n, 且$p,q,m,n>0, p+q+m+n=1$.

设事件B'：共走了N步, $N\in N^*$, 到达了点(a,b)（假设$a,b>0$）, $|a|+|b|\le N$. 则：

$$P(B')=\begin{cases}0, i \not\equiv (a+b)-(c+d)(\mathrm{mod}\,2),\\ \sum_{i=a-c}^{N-(b-d)}\left[C_N^i (p+q)^i (m+n)^{N-i} \cdot C_i^{\frac{i+(a-c)}{2}} p^{\frac{i+(a-c)}{2}} q^{\frac{i-(a-c)}{2}} \cdot C_i^{\frac{N-i+(b-d)}{2}} m^{\frac{N-i+(b-d)}{2}} n^{\frac{N-i-(b-d)}{2}}\right],\\ i \equiv (a+b)-(c+d)(\mathrm{mod}\,2).\end{cases}$$

3. 2^n 维随机游走

在得到了二维随机游走的结果后, 由于 2^n 维可以看作是 n 个二维情况的简单叠加, 因此我们可以以类似的方法将几个 Bernoulli 概型进行叠加, 从而得到 2^n 维随机游走的结论. 然而, 由于每一次使用 Bernoulli 概型时, 它的分布 $C_N^k p^k q^{N-k}$ 中的 N 总是一个变量, 所以得到的表达式是十分复杂的, 也不易于计算. 因此, 本文中并没有给出计算.

4. 三维随机游走

三维随机游走无法简单地像二维随机游走直接将几个 Bernoulli 概型进行叠加, 因为它需要的是一个三维随机变量的分布概型, 故我们用最基本的方法来推出三维随机游走模型.

首先, 我们引出一个有放回摸球问题:

引理 1: 一个袋子中有 A 个白球, B 个黑球, D 个红球（各球形状大小均无差异）. 现有放回地从袋子中摸球, 设事件 S : 在 n 次摸球中摸到 a 个白球, b 个黑球, （$n-a-b$ 个红球）, 则 $P(S)=G_n^{a,b} \cdot p^a q^b r^{n-a-b}\left(=G_n^{a,b} \cdot p^a q^b [1-(p+q)]^{n-(a+b)}\right)$.

证明: 由于摸球是有放回的, 不妨假设每个球都是有编号的, 那么每次摸球都有 $(A+B+D)$ 种可能的情况, 即每一次摸球有 $(A+B+D)$ 个样本点; 又因为共摸了 n 次, 所以共有 $(A+B+D)^n$ 个样本点.

事件 S 是 n 次摸球中摸到 a 个白球, b 个黑球, 这样的组合有 $C_n^a \cdot C_{n-a}^b$ 个.

为了表示方便, 我们先引入一个符号 $G_n^{a,b}$,

$$G_n^{a,b} = C_n^a \cdot C_{n-a}^b = \frac{n!}{a!(n-a)!} \cdot \frac{(n-a)!}{b!(n-a-b)!} = \frac{n!}{a!b!(n-a-b)!}.$$

即这样的组合有 $G_n^{a,b}$ 个.

而对于每一种组合情况, 又都有 $A^a B^b D^{n-a-b}$ 个样本点, 而且这 $G_n^{a,b}$ 种情况又是两两互斥的, 所以事件 S 中有 $G_n^{a,b} \cdot A^a B^b D^{n-a-b}$ 个样本点. 再由古典概型的定义可得:

$$P(S) = \frac{G_n^{a,b} \cdot A^a B^b D^{n-a-b}}{(A+B+D)^n}.$$

又假设摸到白球的概率是 p, 摸到黑球的概率是 q, 摸到红球的概率是 r, 必然有 $p+q+r=1$, $r=1-(p+q)$. 根据古典概型的定义, 可知 $p=\frac{A}{A+B+D}$, $q=\frac{B}{A+B+D}$, $1-(p+q)=r=\frac{D}{A+B+D}$, 则:

$$P(S) = \frac{G_n^{a,b} \cdot A^a B^b D^{n-a-b}}{(A+B+D)^a \cdot (A+B+D)^b \cdot (A+B+D)^{n-a-b}}$$

$$= G_n^{a,b} \cdot p^a q^b r^{n-a-b} = G_n^{a,b} \cdot p^a q^b [1-(p+q)]^{n-(a+b)}.$$

这与二项分布 $C_n^k p^k q^{n-k} = b(k;n,p)$ 是很类似的, 所以我们不妨记 $G_n^{a,b} p^a q^b [1-(p+q)]^{n-(a+b)} = b(a,b;n,p,q)$.

现在, 我们在此基础上讨论三维随机游走问题.

定理 3：一质点在一个三维坐标空间 $Oxyz$ 上随机游走, 从原点出发. 向 x 轴正方向移动的概率为 p, 向 x 轴负方向移动的概率为 q, 向 y 轴正方向移动的概率为 m, 向 y 轴负方向移动的概率为 n, 向 z 轴正方向移动的概率为 s, 向 z 轴负方向移动的概率为 t, 且 $p,q,m,n,s,t>0$, $p+q+m+n+s+t=1$. 设事件 T：共走了 N 步, $N \in N^*$, 到达了点 (a,b,c)（假设 $a,b,c>0$）, $|a|+|b|+|c| \le N$. 则:

$$P(T)=\begin{cases}0, N \not\equiv a+b+c(\bmod 2)\\ \sum_{g=a}^{N-(b+c)}\sum_{h=b}^{N-(a+c)}\left[G_N^{g,h}(p+q)^g(m+n)^h(s+t)^{N-(g+h)}\cdot C_g^{\frac{g+a}{2}}p^{\frac{g+a}{2}}q^{\frac{g-a}{2}}\cdot C_h^{\frac{h+b}{2}}p^{\frac{h+b}{2}}q^{\frac{h-b}{2}}\cdot\right.\\ \left.C_{N-(g+h)}^{\frac{N-(g+h)+c}{2}}p^{\frac{N-(g+h)+c}{2}}q^{\frac{N-(g+h)-c}{2}}\right], N\equiv a+b+c(\bmod 2), g\equiv a(\bmod 2), h\equiv b(\bmod 2).\end{cases}$$

证明：

设事件A：沿x轴方向走了g步, 沿y轴方向走了h步, 沿z轴方向走了j步.

显然有$j=N-(g+h)$, 且需$a\le g\le N-(b+c)$,

同理, $b\le h\le N-(a+c)$, $c\le j\le N-(a+b)$.

根据引理 1, 可知：

$$P(A)=G_N^{g,h}(p+q)^g(m+n)^h(s+t)^{N-g-h},$$

设事件B：沿x轴方向走了g步的情况下, x轴上到坐标a.

设向a所在方向移动了i步, 则$i-(g-i)=a\Rightarrow i=\dfrac{g+a}{2}$.

$$P(B|A)=C_g^i p^i q^{g-i}=C_g^{\frac{g+a}{2}}p^{\frac{g+a}{2}}q^{\frac{g-a}{2}}.$$

同理,

事件C：沿y轴方向走了h步的情况下, y轴上到坐标b.

$$P(C|A)=C_h^{\frac{h+b}{2}}m^{\frac{h+b}{2}}n^{\frac{h-b}{2}}.$$

事件D：沿z轴方向走了j步的情况下, z轴上到坐标c

$$P(D|A)=C_j^{\frac{j+c}{2}}s^{\frac{j+c}{2}}t^{\frac{j-c}{2}}=C_{N-(g+h)}^{\frac{N-(g+h)+c}{2}}s^{\frac{N-(g+h)+c}{2}}t^{\frac{N-(g+h)-c}{2}}.$$

综上所述,

$$\therefore P(T)=\sum_{g=a}^{N-(b+c)}\sum_{h=b}^{N-(a+c)}\left[G_N^{g,h}(p+q)^g(m+n)^h(s+t)^{N-(g+h)}\cdot C_g^{\frac{g+a}{2}}p^{\frac{g+a}{2}}q^{\frac{g-a}{2}}\cdot C_h^{\frac{h+b}{2}}p^{\frac{h+b}{2}}q^{\frac{h-b}{2}}\cdot\right.$$

$$\left.C_{N-(g+h)}^{\frac{N-(g+h)+c}{2}}p^{\frac{N-(g+h)+c}{2}}q^{\frac{N-(g+h)-c}{2}}\right].$$

推论 3：一质点在一个三维坐标空间 $Oxyz$ 上随机游走, 从点 (d,e,f) 出发. 向 x 轴正方向移动的概率为 p, 向 x 轴负方向移动的概率为 q, 向 y 轴正方向移动的概率为 m, 向 y 轴负方向移动的概率为 n, 向 z 轴正方向移动的概率为 s, 向 z 轴负方向移动的概率为 t, 且 $p,q,m,n,s,t>0$, $p+q+m+n+s+t=1$. 设事件 T：共走了 N 步, $N\in N^*$, 到达了点 (a,b,c)（假设 $a,b,c>0$, $a\ge d$, $b\ge e$, $c\ge f$）, $|a|+|b|+|c|\le N$. 则：

$$P(T)=\begin{cases}0, N\not\equiv (a+b+c)-(d+e+f)\pmod 2\\ \displaystyle\sum_{g=a-d}^{N-[(b+c)-(e+f)]}\sum_{h=b-e}^{N-[(a+c)-(d+f)]}\left[G_N^{g,h}(p+q)^g(m+n)^h(s+t)^{N-(g+h)}\cdot C_g^{\frac{g+(a-d)}{2}}p^{\frac{g+(a-d)}{2}}q^{\frac{g+(a-d)}{2}}\cdot\right.\\ \left. C_h^{\frac{h+(b-e)}{2}}p^{\frac{h+(b-e)}{2}}q^{\frac{h-(b-e)}{2}}\cdot C_{N-(g+h)}^{\frac{N-(g+h)+(c-f)}{2}}p^{\frac{N-(g+h)+(c-f)}{2}}q^{\frac{N-(g+h)-(c-f)}{2}}\right],\\ N\equiv(a+b+c)-(d+e+f)\pmod 2, g\equiv a\pmod 2, h\equiv b\pmod 2.\end{cases}$$

5. 多维随机游走

首先, 和三维随机游走一样, 我们先将 Bernoulli 概型推广至 n 维随机变量分布.

引理 2： 一个袋子中有 A_1 个 a_1 球, A_2 个 a_2 球, ⋯, A_k 个 a_k 球（各球形状大小均无差异）. 现有放回的从袋子中摸球, 设事件 M：在 n 次摸球中摸到 B_1 个 a_1 球, B_2 个 a_2 球, ⋯, B_k 个 a_k 球, 则 $P(M)=\dfrac{G_n^{B_1,B_2,\dots,B_k}\cdot\prod_{j=1}^{k}A_j}{\left(\sum_{j=1}^{k}A_j\right)^n}$.

证明：由于是有放回的, 不妨假设每个球都是有编号的, 那么每次摸球都有

$\sum_{j=1}^{k} A_j$ 种可能的情况, 每次有 $\sum_{j=1}^{k} A_j$ 个样本点, 又因为共摸球 n 次, 所以样本点共有 $\left(\sum_{j=1}^{k} A_j\right)^n$ 个.

$$C_n^{B_1} C_n^{B_2} \cdots C_n^{B_k} = G_n^{B_{1,}, B_2, \ldots, B_k} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{k} (B_i!) \cdot \left(n - \sum_{i=1}^{k} B_i\right)}.$$

$$P(M) = \frac{G_n^{B_1, B_2, \ldots, B_k} \cdot \prod_{j=1}^{k} A_j}{\left(\sum_{j=1}^{k} A_j\right)^n},$$

设 $p_j = \frac{A_j}{\sum_{i=1}^{k} A_i}$, 则:

$$P(M) = G_n^{B_{1,}, B_2, \ldots, B_k} \cdot \prod_{j=1}^{k} p_j^{B_j}.$$

由此, 我们不难得到多维随机游走的结果.

可以通过类似于三维的方法证明以下:

猜想: 假设在一个 n 维坐标空间上随机游走, 从原点出发. 向 x_i 轴正方向移动的概率为 p_i, 向 x_i 轴负方向移动的概率为 q_i, 其中 $i \in [1, \ldots, n]$, 且 $p_i, q_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n} (p_i + q_i) = 1$. 设事件 R: 共走了 N 步, $N \in N^*$, 到达了点 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, 其中 a_i 表示在坐标轴 x_i 上的坐标（假设 $a_i > 0$）, $\sum_{i=1}^{n} a_i \le N$. 记 $\lambda = \sum_{i=1}^{n} a_i$, 则:

$$P(R) = \sum_{j_1=a_1}^{N-\lambda-a_1} \sum_{j_2=a_2}^{N-\lambda-a_2} \cdots \sum_{j_n=a_n}^{N-\lambda-a_n} \left[G_n^{B_{1,}, B_2, \ldots, B_n} \cdot \prod_{j=1}^{n} p_j^{B_j} \cdot \prod \left(C_{j_i}^{\frac{j_i+a_i}{2}} \cdot p^{\frac{j_i+a_i}{2}} q^{\frac{j_i-a_i}{2}} \right) \right].$$

6. 一维随机游走的再讨论

首先，我们需要两条组合数学中 T 路的基本定理.

引理 3　若整点 $A(a,\alpha)$ 和整点 $B(b,\beta)$ 满足 T 条件,那么 A 到 B 的 T 路条数为

$$\frac{(b-a)!}{\left(\frac{b-a}{2}+\frac{\beta-\alpha}{2}\right)!\cdot\left(\frac{b-a}{2}-\frac{\beta-\alpha}{2}\right)!}.$$

引理 4 **（反射原理）** 若整点 $A(a,\alpha)$ 和整点 $B(b,\beta)$ 满足 T 条件,且 $\alpha>0,\beta>0$,则由 $A(a,\alpha)$ 到 $B(b,\beta)$ 的经过 x 轴的 T 路条数等于由 $A'(a,-\alpha)$ 到 $B(b,\beta)$ 得 T 路条数,

为 $\frac{(b-a)!}{\left(\frac{b-a}{2}+\frac{\beta+\alpha}{2}\right)!\cdot\left(\frac{b-a}{2}-\frac{\beta+\alpha}{2}\right)!}$.

这条定理的具体证明并不复杂,可以参见参考书目[5].

定理 4 从零点出发在数轴 x 上一维随机游走,设每一步移动的距离均为一个单位,每一次移动向右走和向左走的概率均为 $1/2$.现已知在一次随机游走中向左走的步数与向右走的步数均为 n,即总步数为 $2n$,最后回到了零点.设事件 Q:在上述随机游走中仅仅出发时和最后一步经过了零点.则

$$P(Q)=\frac{2n!n!}{(2n)!}\left[\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}-\frac{(2n-2)!}{n!(n-2)!}\right].$$

证明: 根据引理 3 和引理 4 可知，由 $A(a,\alpha)$ 到 $B(b,\beta)$ 的不经过 x 轴的 T 路条数 S

等于 $\frac{(b-a)!}{\left(\frac{b-a}{2}+\frac{\beta-\alpha}{2}\right)!\cdot\left(\frac{b-a}{2}-\frac{\beta-\alpha}{2}\right)!}-\frac{(b-a)!}{\left(\frac{b-a}{2}+\frac{\beta+\alpha}{2}\right)!\cdot\left(\frac{b-a}{2}-\frac{\beta+\alpha}{2}\right)!}$.

而所求的路即为从 $A_1(1,1)$ 到 $B_1(2n-1,1)$ 和从 $A_2(1,-1)$ 到 $B_2(2n-1,-1)$ 的不经过 x 轴的 T 路条数之和，$S_1=\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}-\frac{(2n-2)!}{n!(n-2)!}$, $S_2=\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}-\frac{(2n-2)!}{n!(n-2)!}$,

所以 $S=2\left[\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}-\frac{(2n-2)!}{n!(n-2)!}\right]$.而由 $A(a,\alpha)$ 到 $B(b,\beta)$ 的 T 路条数 N 为 $\frac{(2n)!}{n!n!}$,

所以 $P(Q)=\frac{S}{N}=2\left[\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}-\frac{(2n-2)!}{n!(n-2)!}\right]\div\frac{(2n)!}{n!n!}$

$=\frac{2n!n!}{(2n)!}\left[\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}-\frac{(2n-2)!}{n!(n-2)!}\right]$,证毕.

更一般的,我们有以下定理.

定理 5 从零点出发在数轴 x 上一维随机游走,设每一步移动的距离均为一个单位,每一次移动向右走为 p,向左走的概率为 q, $p+q=1$.设事件 R:在上述随机游走中总步数为 $2n$, $n\in N^*$,最后到了点 a, $|a|\le 2n$,且仅仅出发时经过了零点,途中没有经过零点.则

$$P(R)=\begin{cases}0,2n\not\equiv a(\bmod 2)\\ \binom{2n}{\frac{2n+a}{2}}p^{\frac{2n+a}{2}}q^{\frac{2n+a}{2}}\cdot\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\frac{\left(n+\frac{a}{2}\right)!\left(n-\frac{a}{2}\right)!}{\left(\frac{2n+a}{2}\right)!\left(\frac{2n-a}{2}-1\right)!}\right],2n\equiv a(\bmod 2),a\ne 0\\ \binom{2n}{\frac{2n+a}{2}}p^{\frac{2n+a}{2}}q^{\frac{2n+a}{2}}\cdot\frac{2n!n!}{(2n)!}\left[\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}-\frac{(2n-2)!}{n!(n-2)!}\right],a=0\end{cases}$$

证明:

首先讨论到达点 a 的概率 $P(R_1)$.

不难证明当 $2n\not\equiv a(\bmod 2)$ 时该事件是不可能发生的(即仅当 $2n$, a 奇偶性相同时才有可能发生).

设共向右走了 k 步, 则向左走了 $N-k$ 步, 则:

$$k-(2n-k)=a\Rightarrow k=\frac{2n+a}{2},$$

$$P(R_1)=C_{2n}^k p^k q^{N-k}=C_{2n}^{\frac{2n+a}{2}}p^{\frac{2n+a}{2}}q^{\frac{2n+a}{2}},$$

由此可得, $P(R_1)=\begin{cases}0,2n\not\equiv a(\bmod 2)\\ C_{2n}^{\frac{2n+a}{2}}p^{\frac{2n+a}{2}}q^{\frac{2n+a}{2}},2n\equiv a(\bmod 2)\end{cases}$.

接下来,讨论途中不经过零点得概率 $P(R_2)$.

由于上述讨论中并不需要涉及到每一次移动的先后顺序,所以可以将其看做一个古典概型.

增加一个步数轴,可以将这个问题转化为一个 T 路计数问题:由点 $(0,0)$ 到点 $A(2n,a)$ 途中的不经过 x 轴的 T 路条数占所有点 $(0,0)$ 到点 $A(2n,a)$ 的 T 路的比例.

由引理 3,点 $(0,0)$ 到点 $A(2n,a)$ 的 T 路条数

$$N_1=\frac{(2n)!}{\left(n+\frac{a}{2}\right)!\left(n-\frac{a}{2}\right)!}.$$

由引理 4,

若 $a>0$,点 $(0,0)$ 到点 $A(2n,a)$ 且中途不经过 x 轴的 T 路条数即等于点 $(1,1)$ 到点 $A(2n,a)$ 且中途不经过 x 轴的 T 路条数. 点 $(1,1)$ 到点 $A(2n,a)$ 且中途经过 x 轴的 T 路条数

$$N_2'=\frac{(2n-1)!}{\left(\frac{2n+a}{2}\right)!\left(\frac{2n-a}{2}-1\right)!},$$

则点 $(0,0)$ 到点 $A(2n,a)$ 且中途不经过 x 轴的 T 路条数

$$N_2=\frac{N_1}{2}-N_2'=\frac{1}{2}\frac{(2n)!}{\left(n+\frac{a}{2}\right)!\left(n-\frac{a}{2}\right)!}-\frac{(2n-1)!}{\left(\frac{2n+a}{2}\right)!\left(\frac{2n-a}{2}-1\right)!},$$

$$P(R_2)=\left[\frac{1}{2}\frac{(2n)!}{\left(n+\frac{a}{2}\right)!\left(n-\frac{a}{2}\right)!}-\frac{(2n-1)!}{\left(\frac{2n+a}{2}\right)!\left(\frac{2n-a}{2}-1\right)!}\right]\div\frac{(2n)!}{\left(n+\frac{a}{2}\right)!\left(n-\frac{a}{2}\right)!}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\frac{\left(n+\frac{a}{2}\right)!\left(n-\frac{a}{2}\right)!}{\left(\frac{2n+a}{2}\right)!\left(\frac{2n-a}{2}-1\right)!}.$$

若 $a<0$,根据对称性可知, $P(R_2)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\frac{\left(n+\frac{a}{2}\right)!\left(n-\frac{a}{2}\right)!}{\left(\frac{2n+a}{2}\right)!\left(\frac{2n-a}{2}-1\right)!}$.

若 $a=0$,与定理 6 类似地, $P(R_2)=\frac{2n!n!}{(2n)!}\left[\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}-\frac{(2n-2)!}{n!(n-2)!}\right]$.

综上,

$$P(R)=\begin{cases}0,2n\not\equiv a(\mathrm{mod}\,2)\\ C_{2n}^{\frac{2n+a}{2}}p^{\frac{2n+a}{2}}q^{\frac{2n+a}{2}}\cdot\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\frac{\left(n+\frac{a}{2}\right)!\left(n-\frac{a}{2}\right)!}{\left(\frac{2n+a}{2}\right)!\left(\frac{2n-a}{2}-1\right)!}\right],2n\equiv a(\mathrm{mod}\,2),a\neq 0,\\ C_{2n}^{\frac{2n+a}{2}}p^{\frac{2n+a}{2}}q^{\frac{2n+a}{2}}\cdot\frac{2n!n!}{(2n)!}\left[\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}-\frac{(2n-2)!}{n!(n-2)!}\right],a=0\end{cases}$$

证毕.

以上似乎是可以推广至高维的，只需要将 T 路推广即可.

7. 环形随机游走

根据一维随机游走, 我们可以对一种特殊的随机游走模型进行推导——环形随机游走, 即在一个封闭环上的随机游走.

定理 4: 在一个环上, 有 M 个点, 各点之间的距离相等, 且均为一个单位长度. 假设一点从某点 O 出发, 每一次沿环上移动一个单位长度, 假设向顺时针方向移动一个单位的概率为 p，向逆时针方向移动一个单位的概率为 q，且 $p,q>0$，$p+q=1$. 事件 A: 走了 N 步后到达点 a（点 O 与点 a 顺时针方向相距 a，逆时针方向相距 $M-a$），$a\le N,N\in N^*$. 则：

$$P(A)=\sum_{i=1}^{u}C_N^{\frac{N+a+iM}{2}}\left(p^{\frac{N+a+iM}{2}}q^{\frac{N-a-iM}{2}}+p^{\frac{N-a-iM}{2}}q^{\frac{N+a+iM}{2}}\right).$$

证明：这是一种比较复杂的一维随机游走, 复杂之处有两个：1、存在绕了几圈后再到达这一点的可能; 2、往顺时针或是往逆时针方向都可能到达这一点. 所以, 在应用一维随机游走是需要进行一些分类与变化.

I. 由顺时针到达点 a

设事件 B_1：走了 N 步, 由顺时针到达点 a.

设沿顺时针方向共走了 g 步，沿逆时针方向共走了 h 步，则

$$\begin{cases} g-h=kM+a, k\in N \\ g+h=N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g=\dfrac{N+a+kM}{2} \\ h=\dfrac{N-a-kM}{2} \end{cases}.$$

运用一维随机游走的相关结论, 可以得到:

$$P(B_1)=\sum_{i=1}^{u} C_N^{g_i} p^{g_i} q^{N-g_i} = \sum_{i=1}^{u} C_N^{\frac{N+a+iM}{2}} p^{\frac{N+a+iM}{2}} q^{\frac{N-a-iM}{2}},$$

其中 $u=\max\{u : u\cdot M \le N, u\in N\}$.

II. 由逆时针到达点 a

设事件 B_2：走了 N 步, 由逆时针到达点 a.

设沿顺时针方向共走了 m 步, 沿逆时针方向共走了 n 步, 则

$$\begin{cases} n-m=kM+a, k\in N \\ n+m=N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=\dfrac{N+a+kM}{2} \\ m=\dfrac{N-a-kM}{2} \end{cases},$$

运用一维随机游走的相关结论, 可以得到:

$$P(B_2)=\sum_{i=1}^{v} C_N^{n_i} p^{N-n_i} q^{n_i} = \sum_{i=1}^{v} C_N^{\frac{N+a+iM}{2}} p^{\frac{N-a-iM}{2}} q^{\frac{N+a+iM}{2}},$$

其中 $v=\max\{v : v\cdot M \le N, u\in N\}$.

显然, 在一次随机游走过程中, 以上的 $u=v$.

综上, $P(A)=P(B_1)+P(B_2)^{\frac{N+a+iM}{2}}$

$$=\sum_{i=1}^{u} C_N^{\frac{N+a+iM}{2}} p^{\frac{N+a+iM}{2}} q^{\frac{N-a-iM}{2}} + \sum_{i=1}^{v} C_N^{\frac{N+a+iM}{2}} p^{\frac{N-a-iM}{2}} q^{\frac{N+a+iM}{2}}$$

$$=\sum_{i=1}^{u} C_N^{\frac{N+a+iM}{2}} \left(p^{\frac{N+a+iM}{2}} q^{\frac{N-a-iM}{2}} + p^{\frac{N-a-iM}{2}} q^{\frac{N+a+iM}{2}} \right),$$

其中 $u=\max\{u : u\cdot M \le N, u\in N\}=\dfrac{N-a}{M}$.

参考文献

[1] 魏宗舒.概率论与数理统计[M].北京：高等教育出版社,1983.
[2] 刘次华.随机过程,第四版[M].武汉：华中科技大学出版社,2008.
[3] 孙荣恒.趣味随机问题[M].北京：科学出版社,2004.
[4] 卢开澄,卢华明.组合数学,第三版[M].北京：清华大学出版社,2002.
[5] 曹汝成.组合数学[M].华南理工大学出版社,2006
[6] L.LOVÁSZ. Random walks on graphs: a survey [J].Keszthely (Hungary),1993.